DE' PUNTI MULTIPLI DELLE CURVE ALGEBRICHE MEMORIA DEL PROFESSORE...

Fortunato Padula

DE' PUNTI MULTIPLI

DELLE

CURVE ALGEBRICHE

MEMORIA

DEL PROFESSORE

FORTUNATO PADULA

di Napoli

ESTRATTA DAGLI ANNALI
DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
PUBBLICATI IN ROMA
MAGGIO 1852

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI
1852

MEMORIA

DE'PUNTI MULTIPLI DELLE CURVE ALGEBRICHE

1. La ricerca de'punti multipli in generale per una curva qualunque algebrica o trascendente data dall'equazione

$$(1) \qquad F(x,y) = 0,$$

dipende come è noto dalla risoluzione dell'equazione precedente unita ad una delle due

$$(2) \quad \frac{dF}{dx} = 0, \quad (3) \quad \frac{dF}{dy} = 0,$$

ed è pur noto che se queste tre equazioni non possono essere coesistenti la curva data non ammette punti multipli. Ammesso intanto che eliminando x, y dalle equazioni (1), (2), (3) resti soddisfatta l'equazione di condizione risultante, non ne segue che tutti i valori di x e di y ricavati risolvendo due di quelle equazioni soddisferanno pure alla terza; ma solo alcuni di essi. Così, nel caso che l'equazione (1) fosse algebrica e del grado m, mentre eliminando la y dalle equazioni (2), (3) l'equazione finale in x potrà essere del grado $(m-1)^2$, non tutti gli $(m-1)^2$ valori di x ed i corrispondenti di y soddisferanno alla (1), ma solo alcuni tra quelli. Lo scopo delle presenti ricerche è appunto di determinare per le sole curve algebriche quali sieno le equazioni convenienti alla determinazione delle coordinate de'punti multipli, e specialmente de'punti doppi senza che esse contengano soluzioni estranee alla quistione. Già sin dall'anno 1844 pubblicammo nel Rendiconto de'lavori della reale accademia delle scienze un articolo intorno a'punti multipli delle curve algebriche, in cui dimostrammo un teorema comunicatoci dal ch. geometra sig. Steiner; cioè che il numero

de' punti doppi di una curva algebrica del grado m non può esser maggiore di $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$: accennammo pure una via, quantunque molto lunga, come pervenire ad un'equazione finale in x di grado minore di $(m-1)^2$, cioè dell'equazione risultante dall'eliminazione della y tra le equazioni (2), (3) ma non ci riuscì dimostrare che quell'equazione non potea esser di grado maggiore di $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$. Prima intanto d'intraprendere la ricerca delle equazioni di cui bisogna far uso per assegnare i punti multipli, passeremo a dimostrare alcuni teoremi di algebra, di cui per altro la dimostrazione è facilissima.

2. I valori di x comuni a tre equazioni della forma

$$(1)\quad F(x,y)=0,\quad (2)\quad \frac{dF}{dx}=0\ ,\quad (3)\quad \frac{dF}{dy}=0,$$

corrispondono ad una radice doppia dell'equazione in x risultante dall'eliminare la y tra le equazioni (1) e (2), ovvero (1) e (3).

Infatti supponendo che risoluta l'equazione (2) rispetto ad y abbiasi $y=\varphi(x)$, indicando con $f(x)=0$ l'equazione in x che risulta dall'eliminazione della y, si avrà

$$f(x)=F[x,\varphi(x)]\ ,$$

onde

$$f'(x)=\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\varphi'(x)\ ,$$

e per conseguenza quel valore $x=a$ che verifica le tre equazioni (1), (2), (3) darà pure $f'(x)=0$, e quindi sarà una radice doppia dell'equazione $f(x)=0$.

Viceversa ogni radice doppia dell'equazione in x risultante dall'eliminare la y tra le equazioni (1) e (3) sarà un valore di x che soddisfà insieme ad un valore di y, convenientemente determinato, alle tre equazioni (1), (2), (3).

Infatti se $y=\psi(x)$ è il valore di y dedotto dall'equazio-

ne (3), sarà

$$f(x) = F[x, \psi(x)] , \text{ ed } f'(x) = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\psi'(x).$$

Or ogni radice $x = a$ dell'equazione $f(x) = 0$ verifica le due (1) e (3), cioè che queste due danno per y almeno un valor comune quando si fa in esse $x = a$. Ma essendo $x = a$ una radice doppia dell' equazione $f(x) = 0$, deve essere anche $f'(a) = 0$, dunque sarà pure $\frac{dF}{dx} = 0$; cioè che il valore $x = a$ è uno de' valori di x che soddisfanno alle tre equazioni (1), (2), (3).

3. Giova avvertire che se si eliminasse la y tra le equazioni (1), (2) una radice doppia dell'equazione risultante $f(x)=0$ potrebbe non verificare la (3). Imperocchè indicando con $x = a$ questa radice si avrebbe nel tempo stesso $F = 0$, $\frac{dF}{dx} = 0$, ed $f'(x) = 0$, e per conseguenza $\frac{dF}{dy}\varphi'(x) = 0$; onde il valore $x = a$, invece di soddisfare all'equazione $\frac{dF}{dy} = 0$, potrebbe esser radice dell'equazione $\varphi'(x) = 0$, ovvero $\frac{d^2F}{dx^2} = 0$.

Similmente è chiaro: che ogni valore di y comune alle tre equazioni (1), (2), (3) del n. 2 è radice doppia dell'equazione in y risultante dall'eliminazione della x tra la (1) ed una qualunque delle equazioni (2) e (3):

Che se si elimina la x tra la (1) e la (2) ogni radice doppia dell'equazione in y che ne risulta soddisfà pure alla (3):

E che se si eliminasse la x tra le due (1), (3) una radice doppia dell' equazione risultante in y in vece di verificare la (2) potrebbe esser radice dell' equazione $\frac{d^2F}{dy^2} = 0$.

4. Sieno $x = a$, $y = b$ due valori di x e di y che sod-

disfacciano alle tre equazioni

$$(1) \quad F(x, y) = 0 , \qquad (2) \quad \frac{dF}{dx} = 0, \qquad (3) \quad \frac{dF}{dy} = 0 ,$$

e

$$(4) \qquad \varphi(x, y) = 0 ,$$

un'equazione qualunque che sia pure verificata da'valori $x=a$, $y=b$; il valore $x=a$ sarà una radice doppia dell'equazione in x che risulta eliminando la y dalle equazioni (1), (4).

Infatti indicando con $f(x)$ l'equazione finale, e con $\psi(x)$ il valore della y tratto dalla (4), si avrà

$$f(x) = F[x, \psi(x)] ,$$

onde

$$f'(x) = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \psi'(x) ,$$

e poichè i valori $x = a$, $y = b$ soddisfanno alle equazioni (2), (3), sarà $f'(a) = 0$; e per conseguenza $x = a$ è una radice doppia dell'equazione $f(x) = 0$.

Similmente osservando che

$$f''(x) = \frac{d^2F}{dx^2} + 2 \frac{d^2F}{dx\,dy} \psi'(x) + \frac{d^2F}{dy^2} [\psi'(x)]^2 + \frac{dF}{dy} \psi''(x),$$

e così di seguito, si potrebbe dimostrare che: se i valori $x=a$, $y=b$ annullano la funzione $F(x, y)$, e tutte le sue derivate parziali sino a quelle dell'ordine $(n-1)^{esimo}$ inclusivamente, l'equazione $f(x) = 0$ avrà n radici eguali ad a; cioè l'equazione $f(x) = 0$, liberata da fratti, e da radicali, sarà della forma $(x - a)^n f_1(x) = 0$. Ed eliminando la x tra le equazioni (1), (4) si avrà un'equazione in y della forma $(y-b)^n f_2(y)=0$.

5. Supponendo che le equazioni

$$(1) \quad F(x, y) = 0 , \qquad (2) \quad \frac{dF}{dx} = 0 , \qquad (3) \quad \frac{dF}{dy} = 0 ,$$

sieno coesistenti, e che la (1) sia liberata da fratti e da radicali, e di grado m, si dinoti con

$$(4) \qquad f(x) = 0,$$

l'equazione in x che risulta eliminando la y tra le due (1), (3) e sia $\varphi(x)$ il massimo comun divisore tra $f(x)$ ed $f'(x)$, sarà l'equazione

$$(5) \qquad \varphi(x) = 0$$

di grado non maggiore di $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

Infatti indicando con n il grado dell'equazione (5) sieno

$$x = a_1, \; x = a_2, \; x = a_3, \ldots\ldots, x = a_n$$

le sue radici, ed

$$y = b_1, \quad y = b_2, \quad y = b_3, \ldots\ldots, y = b_n$$

i corrispondenti valori di y che soddisfanno alle equazioni (1), (3). Per ciò che si è detto nel n. 2 essi verificheranno pure la (2). Ciò posto si dinoti con s il più piccolo numero intero che dà

$$\frac{s(s+3)}{2} \overline{>} n,$$

talchè sia

$$\frac{(s-1)(s+2)}{2} < n:$$

si faccia

$$(6) \qquad \frac{s(s+3)}{2} = n + i,$$

e sieno

$$x = \alpha_1, \; y = \beta_1; \; x = \alpha_2, \; y = \beta_2; \ldots; \; x = \alpha_i, \; y = \beta_i;$$

de'valori di x e di y che verifichino l'equazione (1). Sia inoltre

$$(7) \qquad \psi(x, y) = 0$$

un'equazione del grado s che resti soddisfatta da'valori

$$x = a_1, \; y = b_1; \; \ldots; \; x = a_n, \; y = b_n;$$

$$x = \alpha_1, \; y = \beta_1; \ldots; \; x = a_i, \; y = \beta_i,$$

il che, come è chiaro, potrà farsi contenendo la (7) appunto $\frac{s(s+3)}{2} = n + i$ costanti arbitrarie: eliminando la y dalle equazioni (1) e (7), per ciò che si è detto nel numero precedente, l'equazione in x che ne risulta sarà della forma

$$f(x) = (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots$$
$$\dots (x - \alpha_i) f_1(x) = 0,$$

in cui $f_1(x)$ potrà contenere altri fattori, e potrebbe anche essere di grado zero. Ma l'equazione $f(x) = 0$ tutt'al più può elevarsi al grado ms, dunque si avrà

$$(8) \qquad ms \geqq 2n + i,$$

e per conseguenza, eliminando la i per mezzo della (6), si otterrà

$$n \leqq \frac{1}{2} s(2m - 3 - s).$$

E divenendo il secondo membro di questa ineguaglianza un massimo quando $s = m - \frac{3}{2}$, osservando che s deve essere un numero intero, il valore più grande che potrà acquistare corrisponderà o ad $s = m - 1$, ovvero ad $s = m - 2$, che danno entrambi

$$(9) \qquad n \overset{=}{<} \frac{(m-1)(m-2)}{2} \quad (*)$$

(*) Quantunque dal ragionamento usato resti provato che il grado dell'equazione $\varphi(x) = 0$ non possa esser maggiore di $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, pure sarebbe desiderabile che si potesse scovrire un procedimento di calcolo per formare i varii termini della $\varphi(x)$ dal quale apparisse essere il grado del primo termine non maggiore dell'indicato valore: si avrebbe per tal modo una dimostrazione più diretta ed analitica del teorema enunciato.

6. Dalle cose finora esposte segue, che se

$$F(x, y) = 0$$

è l'equazione di una curva algebrica del grado m per determinare i punti multipli si eliminerà la y tra l'equazione (1) e la

$$(2) \qquad \frac{dF}{dy} = 0 ,$$

indi, indicando con $f(x) = 0$ l'equazione che ne risulta, si cercherà il massimo comun divisore tra $f(x)$ ed $f'(x)$: se queste due funzioni di x non ammettono massimo comun divisore la curva data non avrà punti multipli; che se poi hanno un comun divisore $\varphi(x)$, l'equazione $\varphi(x) = 0$ darà le ascisse de' punti multipli, che in generale saranno punti doppi, ed il loro numero non potrà essere maggiore di $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ tale essendo tutt'al più il grado dell'equazione precedente.

Si potrebbe pure eliminare la x tra la (1) e l'equazione

$$(3) \qquad \frac{dF}{dx} = 0 ,$$

e detto $\psi(y)$ il massimo comun divisore tra il primo membro dell'equazione risultante e la sua derivata, l'equazione $\psi(y) = 0$ darebbe le ordinate de'punti multipli della proposta. Ma se si eliminasse la y tra le equazioni (1) e (3), indicando con $\varphi_1(x)$ il massimo comun divisore tra il primo membro dell'equazione risultante e la sua derivata , l'equazione $\varphi_1(x) = 0$ potrebbe aver per radici non solo le ascisse de'punti multipli , ma anche le ascisse de'punti della curva proposta, in cui la tangente è parallela all' asse delle x : lo che avverrebbe quando le curve date dalle equazioni (1), (3) in vece di tagliarsi si toccassero in questi punti. Ciò deducesi dalla prima osservazione fatta nel n. 3.

7. Sieno

$$(A)\quad x=a_1\,,\ y=b_1\,;\ x=a_2\,,\ y=b_2\,;\ \ldots\,;\ x=a_m,\ y=b_n\,,$$

de'valori corrispondenti di x e di y i quali soddisfacciano simultaneamente alle equazioni

$$(B)\quad\left\{\begin{array}{l} F(x,y)=0\,;\ \dfrac{dF}{dx}=0\,,\ \dfrac{dF}{dy}=0;\dfrac{d^2F}{dx^2}=0\,,\ \dfrac{d^2F}{dxdy}=0,\\[2ex] \dfrac{d^2F}{dy^2}=0;\ldots;\ \dfrac{d^{\mu-1}F}{dx^{\mu-1}}=0\,,\ \dfrac{d^{\mu-1}F}{dx^{\mu-2}dy}=0,\ldots,\\[2ex] \dfrac{d^{\mu-1}F}{dy^{\mu-1}}=0\,, \end{array}\right.$$

sarà

$$(C)\qquad n \leqq \frac{(\alpha-3)(2m-\alpha)}{2(\mu-1)}\,,$$

in cui α è il numero intero, non minore di 4, prossimamente maggiore di $\dfrac{2m}{\mu}$.

Infatti indicando con r un numero intero qualunque minore di n, e con s il più piccolo numero intero che dà

$$(2)\qquad \frac{s(s+3)}{2} \geqq r\,,$$

e per conseguenza

$$(3)\qquad \frac{(s-1)(s+2)}{2} < r\,,$$

si faccia

$$(4)\qquad \frac{s(s+3)}{2} = r+i\,;$$

e sieno

$$x=\alpha_1\,,\ y=\beta_1\,;\ x=\alpha_2\,,\ y=\beta_2\,;\ \ldots\ x=\alpha_i\,,\ y=\beta_i$$

de' valori di x e di y che soddisfacciano all'equazione (1). Si dinoti inoltre con

$$(5) \qquad \varphi(x,y)=0,$$

un'equazione del grado s che resti soddisfatta da'valori

$$x=a_1,\ y=b_1;\ \ldots\ x=a_r,\ y=b_r;$$
$$x=\alpha_1,\ y=\beta_1;\ \ldots\ x=\alpha_i,\ y=\beta_i,$$

il che si potrà fare in generale, contenendo la (5) $\frac{s(s+3)}{2}=r+i$ costanti arbitrarie. Eliminando la y tra le equazioni (5) ed (1) si avrà, per ciò che si è detto nel n. 4, una equazione della forma

$$(6)\ (x-a_1)^\mu(x-a_2)^\mu\ldots(x-a_r)^\mu(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_i)f_1(x)=0,$$

in cui $f_1(x)$ potrà contenere altri fattori in x o anche essere di grado zero. Ma essendo l'equazione (5) di grado s e la (1) di grado m, il grado della (6) non può esser maggiore di ms, dunque si avrà

$$(7) \qquad ms \overset{=}{>} \mu r + i,$$

donde eliminando i per mezzo dell'equazione (4) risulta

$$(8) \quad r \overset{=}{<} \frac{s(2m-s-3)}{2(\mu-1)}.$$

Da questo valore di r in virtù dell'inuguaglianza (3) ricavasi

$$\frac{s(2m-s-3)}{2(\mu-1)} > \frac{(s-1)(s+2)}{2}$$

ovvero

$$s\left(s-\frac{2(m-1)}{\mu}+1\right)<\frac{2(\mu-1)}{\mu},$$

dalla quale si deduce dover essere

$$s<\frac{2(m-1)}{\mu}.$$

Segue da ciò che affinchè i valori (A) di x e di y possano si-

multaneamente verificare le equazioni (B) dovrà essere

$$(9) \qquad n \leqq \frac{h(2m-3-h)}{2(\mu-1)} \,,$$

in cui h non solo dovrà essere minore di $\frac{2(m-1)}{\mu}$, ma deve esser determinato in modo che per ogni valore di r minore di quello che si otterrà per n dalla (9) restino soddisfatte le inuguaglianze (2), (3) , (8) : cioè che determinato il valore di s, che deve essere un numero intero, per mezzo delle inequazioni (2), (3), si abbia

$$r \leqq \frac{s(2m-s-3)}{2(\mu-1)} \;;$$

la quale condizione, in virtù della (2), sarà sempre soddisfatta se si ha

$$s+3 \leqq \frac{2m-s-3}{\mu-1} \,, \quad \text{ovvero} \quad s \leqq \frac{2m}{\mu} - 3.$$

Quindi se facciamo h uguale al primo numero intero maggiore di $\frac{2m}{\mu} - 3$, riflettendo che $s < h$, ne segue che la formola (9) ci darà per n un valore tale che per ogni valore $r < n$ resteranno soddisfatte le inuguaglianze (2), (3), (8): e per conseguenza indicando con α il primo numero intero, non minore di 4, e maggiore di $\frac{2m}{\mu}$, si avrà $h = \alpha - 3$, e dalla

(9) $n \leqq \frac{(\alpha-3)(2m-\alpha)}{2(\mu-1)}$ che è il valore dato dalla (C) (*).

(*) Non sarà inutile avvertire che dovendo essere

$$h < \frac{2(m-1)}{\mu}$$

non potevamo nella (9) prendere per h il valore che la rende un massimo, come per brevità abbiam fatto nel n. 5, ove per altro avremmo potuto seguire anche un procedimento analogo a quello qui sopra usato : del resto la formola (C) fattovi $\mu = 2$, e quindi $\alpha = m + 1$, riducesi alla (9) del n. 5.

8. Potrebbesi però credere, che oltre il valore determinato per h ve ne potessero essere degli altri, cioè che potesse anche supporsi $h = \alpha - 2$, o $h = \alpha - 1$; ovvero, ciò ch'è lo stesso, che la formola (C) non desse il maggior numero possibile di soluzioni simultanee di cui son capaci le equazioni (B). Ma è facile convincersi che supponendo n determinato per mezzo della formola (C), queste equazioni non possono ammettere $n+1$ soluzioni: infatti avendo indicato con α il numero intero prossimamente maggiore di $\frac{2m}{\mu}$, si potrà supporre

$$\frac{2m}{\mu} = \alpha - \frac{\alpha'}{\mu},$$

e sarà $\qquad \alpha' > 0$ ed $\alpha' \leqq \mu$;

il valore di n diverrà intanto

$$n \leqq \frac{(\alpha-3)\alpha}{2} - \frac{\alpha'(\alpha-3)}{2(\mu-1)},$$

e ponendo

$$\frac{\alpha'(\alpha-3)}{2(\mu-1)} = \alpha'' - \frac{\alpha'''}{2(\mu-1)},$$

in cui α'' rappresenta il numero intero prossimamente maggiore di $\frac{\alpha'(\alpha-3)}{2(\mu-1)}$, talchè si ha $\alpha''' > 0$ ed $\alpha''' \leqq 2(\mu-1)$ sarà

$$n \leqq \frac{(\alpha-3)\alpha}{2} - \alpha'' + \frac{\alpha'''}{2(\mu-1)};$$

ed il valore che si avrà dalla (C) sarà

$$(1) \qquad n = \frac{\alpha(\alpha-3)}{2} - \alpha'',$$

nel caso di

$$(2) \qquad \alpha''' < 2(\mu-1);$$

ed

$$(3) \qquad n=\frac{\alpha(\alpha-3)}{2}-\alpha''+1\,,$$

nel caso di

$$(4) \qquad \alpha'''=2(\mu-1)\,,\,.$$

lo che avviene quando la formola (C) dà un numero intero, nel qual caso bisogna prendere il segno $=$, ed il valore che si ha da essa corrisponde al valore (3).

Ciò posto se supponiamo che nel caso in cui ha luogo la (2) possa supporsi

$$n=\frac{\alpha(\alpha-3)}{2}-\alpha''+1\,,$$

si rifletta che facendo $r=\frac{\alpha(\alpha-3)}{2}-(\alpha''-1)$, $i=\alpha''-1$ ed $s=\alpha-3$, dovendo essere

$$ms \overset{=}{>} \mu r+i\,,$$

si avrà

$$m(\alpha-3) \overset{=}{<} \frac{\mu\alpha(\alpha-3)}{2}-(\mu-1)(\alpha''-1)\,,$$

ovvero, essendo $2m=\mu\alpha-\alpha'=\mu\alpha-\frac{2(\mu-1)\alpha''}{\alpha-3}+\frac{\alpha'''}{\alpha-3}$,

$$\alpha''' \overset{=}{>} 2(\mu-1)\,,$$

lo che è assurdo in virtù della (2). Parimenti si potrà dimostrare che quando si verifica la (4) non può aumentarsi il valore (3) cioè non si può supporre $n=\frac{\alpha(\alpha-3)}{2}-\alpha''+2$. E per conseguenza il massimo valore che potrà avere n è uguale al maggior numero intero minore della formola (C, 7) quando questa formola assume un valore frazionario, o uguale al numero che essa rappresenta se questo è un intero.

9. Da quanto precede risulta che indicando con n il maggior numero di punti multipli d' indice o multiplicità μ che può ammettere una curva algebrica di grado m, si ha

$$(1) \qquad n \overset{=}{<} \frac{(\alpha - 3)(2m - \alpha)}{2(\mu - 1)},$$

in cui α rappresenta il numero intero, non minore di 4, prossimamente maggiore di $\frac{2m}{\mu}$. Infatti, come è noto, le coordinate de'punti multipli di multiplicità μ debbono soddisfare alle equazioni (B, 7).

10. Nel fascicolo di marzo de'nuovi annali di matematica pubblicati da'signori Terquem e Gerono vi è una memoria del sig. Transon in cui dopo aver dimostrato che il numero dei punti doppi che può ammettere una curva algebrica del grado m è uguale ad $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, passa ad occuparsi del nnmero de'punti di multiplicità μ, e trova

$$n \overset{=}{<} \frac{(m - \mu)(2m(\mu - 1) - \mu)}{(\mu - 1)\mu^2}.$$

Questa formola nel caso che $\frac{2m}{\mu}$ è un numero intero $\left(\text{osservando che allora } \alpha = \frac{2m}{\mu} + 1\right)$ si accorda con quella da noi stabilita; ma nel caso che $\frac{2m}{\mu}$ è un' espressione frazionaria ne differisce, dando risultamenti ora minori ora maggiori. Così supponendo in essa $m = 5$ e $\mu = 4$, si ottiene $n \overset{=}{<} \frac{13}{24}$; e quindi dovrebbe conchiudersi che una curva di quinto grado non può ammettere alcun punto quadruplo. Dalla formola (1, 9) al contrario facendo in generale $\mu = m - 1$, ed osservando che per essere $\frac{2m}{m-1} < 4$ deve farsi $\alpha = 4$, si ha $n \overset{=}{<} \frac{2m-4}{2(m-2)}$

donde per ciò che si è detto alla fine del n. 8 ricavasi $n=1$, e per conseguenza si deduce che una curva algebrica del grade m può ammettere un sol punto di moltiplicità $m-1$ (*). Nella stessa formola del sig. Transon facendo $m=7$ e $\mu=4$, risulta $n \overset{=}{<} \frac{19}{8}$; onde si potrebbe supporre $n=2$, e quindi conchiudere che una curva di settimo grado possa avere due punti quadrupli, lo che evidentemente è assurdo. La nostra formola osservando che $\frac{2m}{\mu}=\frac{7}{2}$ e quindi $\alpha=4$ dà $n \overset{=}{<} \frac{4}{3}$, ovvero $n=1$ (**).

11. Ci rimane ora ad accennare un procedimento per tro-

(*) L'equazione di siffatte curve, presa l'origine delle coordinate al punto multiplo è della forma

$$f_m(x, y)+f_{m-1}(x, y)=0$$

indicando con f_m ed f_{m-1} due funzioni intere, razionali, ed omogenee, una del grado m, e l'altra del grado $m-1$.

(**) Si potrebbe in vero dire che la formola del Sig. Transon, almeno per tutti i casi in cui $\frac{2m}{\mu} \overset{=}{>} 4$, dà de'limiti che il numero n non può sorpassare; ma sarà pur vero che essa non può servire a far conoscere il preciso massimo numero de'punti multipli che può ammettere una curva data; come si ha dalla formola (1, 9). Crediamo inoltre dover avvertire che nella memoria da noi pubblicata nel 1844 dicemmo essersi il Sig. Steiner limitato alla determinazione de'punti doppi considerando egli un punto triplo come la riunione di tre punti doppi, un punto quadruplo come la riunione di sei, ed in generale un punto di multiplicità μ come la riunione di $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ punti doppi. Or è chiaro che dà ciò non si potrebbe conchiudere che dividendo la formola $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ per $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ il quoziente dovesse indicare il numero de'punti di multiplicità μ. Imperocchè una data curva oltre de'punti di multiplicità μ può avere de'punti doppi o altri punti multipli, di cui il numero (riguardandoli tutti come punti doppi secondo di

vare l'equazione in x di grado n di cui le radici fossero i valori che soddisfanno alle equazioni (B, 7). Ora per ciò che abbiam detto ne' numeri 3, e 4 se tra l'equazione $F(x, y)=0$ ed una qualunque delle (B, 7) si elimina la y, l'equazione $f(x)=0$ che ne risulta avrà delle radici multiple di indice μ se le equazioni (B) possono coesistere; onde cercando l'equazione $\varphi_\mu(x)=0$ di cui le radici semplici dinotano le radici di multiplicità μ della $f(x)=0$, tra le radici della $\varphi_\mu(x)=0$ dovranno trovarsi le ascisse de'punti cercati; e sarà facile il distinguerle dovendo soddisfare anche alle altre equazioni (B). Segue da ciò che il grado di $\varphi_\mu(x)$ potrà esser maggiore del numero cercato n, e per conseguenza contenere quell'equazione delle radici da rigettarsi : la giusta equazione si potrebbe trovare uguagliando a zero il massimo comun divisore tra tutti i polinomi $\varphi_\mu(x)$ ottenuti combinando la (1, 7) con ciascuna delle rimanenti equazioni (B); ma questo calcolo sarebbe troppo lungo, ed altronde non essendo nella maggior parte de' casi, in cui la $\varphi_\mu(x)=0$ può esistere molto elevato il suo grado, è più facile far l'esame sopraccennato tra le sue radici.

---

sopra si è detto) è compreso nella formola $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$; di modo che quando vi sono punti di multiplicità maggiore di 2, può il numero totale de'punti doppi che comprendono esser uguale ad $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ e non poter essere il numero de' punti di multiplicità μ uguale ad $\frac{(m-1)(m-1)}{\mu(\mu-1)}$. Così una curva di 7.^{mo} grado può avere quindici punti doppi, ma non potrebbe avere cinque punti tripli; in vece potrà avere quattro punti tripli e tre punti doppi che corrispondono a'quindici punti doppi. E qui cade a proposito far avvertire che l'unico punto di multiplicità $m-1$ che può avere una curva del grado m comprende tutti gli $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ punti doppi, che le curve di quel grado possono avere.

12. Tra le ricerche intraprese dal Sig. Transon nella citata memoria avvi questa: determinare il numero de'punti di multiplicità μ che può avere una curva algebrica del grado m, e nei quali μ' rami si tocchino. E detto r questo numero trova

$$r \overset{=}{<} \frac{m-\mu-\mu'}{(\mu+\mu')^2(\mu+\mu'-2)}\left(2m(\mu+\mu'-1)-\mu-\mu'\right);$$

ma questa formola non è esatta. Infatti seguendo in parti lo stesso andamento tenuto dal Sig. Transon se immaginiamo una curva data dall'equazione

$$(1) \qquad \varphi(x, y) = 0,$$

che passi per gli r punti multipli della curva data e che sia tangente a' μ' rami che si toccano in ciascuno di questi punti, detto s il minor grado possibile dell' equazione precedente si dovrà avere

$$(2) \qquad \frac{s(s+3)}{2} \overset{>}{=} 2r,$$

$$(3) \qquad \frac{(s-1)(s+2)}{2} < 2r,$$

onde potrà farsi

$$(4) \qquad \frac{s(s+3)}{2} = 2r + i,$$

e prendendo sulla curva data altri i punti, si potranno determinare le costanti dell'equazione (1) in modo che la curva da essa rappresentata passi per questi i punti, e per gli r punti multipli, avendo in ciascuno di questi ultimi per tangente la tangente comune a' μ' rami che si toccano. La curva così determinata, avrà come è chiaro $\mu r + \mu' r + i$ punti comuni con la proposta, e per conseguenza si avrà

$$(5) \qquad ms \overset{=}{>} (\mu+\mu')r + i, \qquad (*)$$

(*) Il raggionamento qui usato vedesi essere lo stesso di quello ado-

Paragonando ora le condizioni (2), (3), (4), (5) alle (2), (3), (4), (7) trovate nel n. 7, si vede che esse coincidono cambiando in queste ultime r in $2r$, e μ in $\frac{\mu+\mu'}{2}$, onde dalla formola (C, 7) si avrà

$$\text{(A)} \qquad r \overset{=}{<} \frac{(\alpha-3)(2m-\alpha)}{2(\mu+\mu'-2)} ,$$

in cui α è il numero intero, non minore di 4, prossimamente maggiore di $\frac{4m}{\mu+\mu'}$: la quale come è chiaro differisce di molto dalla formola del Sig. Transon di sopra citata. Facendo nella (A) $\mu'=\mu$ si ottiene

$$\text{(B)} \qquad r \overset{=}{<} \frac{(\alpha-3)(2m-\alpha)}{4(\mu-1)} ,$$

essendo α il numero intero, non minore di 4, prossimamente maggiore di $\frac{2m}{\mu}$. Il Sig. Transon in vece della (B) trova

$$r \overset{=}{<} \frac{(m-2\mu)[m(2\mu-1)-\mu]}{4\mu^2(\mu-1)} ,$$

la quale, come è facile vedere, non corrisponde ne' varii casi particolari. Così supponendo $m=5$ e $\mu=2$, si avrebbe

$$r \overset{=}{<} \frac{13}{16} ;$$

cioè che una curva di 5° grado non potrebbe avere alcun punto doppio in cui i due rami si toccano, mentre anche le cur-

prato, senza la considerazione delle curve, ne' numeri 5 e 7, e fu già da noi usato nel n. 24 della memoria pubblicata nel 1844 su punti doppi, e con tal mezzo si possono risolvere molte quistioni intorno al numero de'punti multipli : abbiamo però ne' numeri 5 e 7 creduto di modificare il modo di trattare le relazioni cui siamo pervenuti.

ve di quarto grado ne ammettono uno. La nostra formola dà per le curve di 5° grado $\alpha = \beta$, ed $r = 3$, onde una curva di quinto grado può aver tre punti in cui due rami si tocchino (*).

13. Termineremo queste ricerche occupandoci di trovar la formola che esprime il numero de'punti di regresso che può avere una curva del grado *m*. Per far ciò osserveremo che la differenza che passa tra un punto ove due rami si toccano ed un punto di regresso è che la tangente a quel punto ovvero una curva qualunque che tocca la curva in quel punto ha nel primo caso quattro punti di comune, riuniti in quel punto,

---

(*) Non sarà inutile notare che la formola del Sig. Transon pe'punti di multiplicità μ, e nei quali tutti i μ rami si toccano non è esatta principalmente perchè egli suppone poter passare per questi punti toccando que'rami una curva del grado $\frac{n}{\mu} - 2$ (essendo n il grado della curva data) il che non è vero. Ed é facile vedere che nella dimostrazione datane dal citato autore non si è tenuto presente, che dovendo la curva passare per quei punti ed avere in essi date tangenti le condizioni da adempiersi sono il doppio del numero de'punti. Che se voglia ammettersi che la formola

$$\frac{\left(\frac{n}{\mu} - 2\right)\left(\frac{n}{\mu} + 1\right)}{2}$$

(V. n. 3 della citata memoria) rappresenti appunto questo doppio numero di punti, allora in vece di dire, come trovasi in seguito, che il numero degli incontri sarebbe

$$2\mu \frac{\left(\frac{n}{\mu} - 2\right)\left(\frac{n}{\mu} + 1\right)}{2},$$

dovrà dirsi che il numero de'punti d'incontro è

$$\frac{\left(\frac{n}{\mu} - 2\right)\left(\frac{n}{\mu} + 1\right)}{2}.$$

con la curva data, e nel secondo caso tre. Quindi restando le denominazioni usate ne'numeri precedenti, è facile vedere che si avranno le seguenti condizioni

$$\frac{s(s+3)}{2} \geqq 2r, \qquad \frac{(s-1)(s+2)}{2} < 2r,$$

$$\frac{s(s+3)}{2} = 2r + i, \qquad ms \geqq 3r + i,$$

nelle quali s dinota il minor grado della curva che può passare per gli r punti di regresso toccando in essi i rami corrispondenti. E poichè le condizioui precedenti non differiscono da quelle trovate nel n. 7 che pel cambiamento di r in $2r$ e di μ in $\frac{3}{2}$, sarà

$$(1) \qquad r \leqq \frac{(\alpha-3)(2m-\alpha)}{2},$$

essendo α il numero intero, non minore di 4, prossimamente maggiore di $\frac{4m}{3}$.

14. Nel volume IX degli annali di Terquem trovasi riportato a pag. 290 un teorema di Plücker in cui sta detto che il numero de' pnnti di regresso non può esser maggiore di $2m(m-2)$. Ma è chiaro che questo risultamento deve considerarsi semplicemente come un limite, che per altro è molto lontano dal vero, e non già come il maggior numero di punti di regresso che possa avere una data curva : proprietà di cui godono tutte le formole da noi finora trovate.

Applicando la formola (1) alle curve di 3° e 4° grado trovasi rispettivamente $\alpha = 4$, $\alpha = 6$, onde $r \leqq 1$, $r \leqq 3$, dacchè segue che le curve di terzo grado non possono avere che un sol punto di regresso, e quelle di quarto tre. Non sarà inutile notare che la curva espressa dall'equazione

$$4y^4 - 16xy^3 + 144x^4 + 4y^3 - 24x^2y - 48x^3 + y^2 + 4xy + 4x^2 = 0$$

ha tre punti di regresso uno all'origine delle coordinate, l'altro sull'asse delle x ed ha per ascissa $\frac{1}{6}$; ed il terzo sull'asse delle y ed ha per ordinata $-\frac{1}{2}$: la curva passa per questi tre punti, per esempio, O, A, B ed ha tre rami OA, AB, BO che determinano una specie di triangolo curvilineo OAB, di cui i vertici O, A, B sono i tre punti di regresso, e tutta la curva cade nell'angolo delle x positive, e delle y negative. La tangente al punto O fa coll' asse delle x positive un angolo che ha per tangente trigonometrica -2; quella al punto A un angolo che ha per tangente trigonometrica 2; e quella al punto B un angolo che ha per tangente 4; talchè le loro equazioni sono rispettivamente

$$y = -2x, \quad y = 2\left(x - \frac{1}{6}\right), \quad y = 4x - \frac{1}{2}.$$

15. Nel n. 12 abbiam detto che una curva di quinto grado non può avere che tre punti doppi in cui i rami si toccano: la curva data dall'equazione

$$32xy^4 + 160x^3y^2 + 168x^5 - 4y^4 - 92x^2y^2 - 145x^4 + 16x^2 = 0$$

ne offre un esempio. I tre punti doppi sono l' origine delle coordinate; il punto che ha per ascissa $\frac{1}{2}$ e per ordinata $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ e quello che ha per ascissa $\frac{1}{2}$ e per ordinata $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$: e le tangenti a questi punti hanno per equazioni rispettivamente

$$x = 0, \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(3x - 2), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(3x - 2).$$

Questa curva presenta una branca chiusa che passa per i detti tre punti, ed è compresa tra l'asse delle y e la parallela ad esso che ha per equazione $x=\frac{4}{7}$, la quale tocca la curva nel punto dato dalle coordinate $x=\frac{4}{7}, y=0$; ha un' altra branca chiusa a sinistra dell'asse delle y che si estende da $x=0$ ad $x=-\frac{\sqrt{433}-7}{48}$: queste due parti si toccano all'origine delle coordinate. Finalmente ha una terza branca composta di due rami infiniti che hanno per asintoto la retta data dall'equazione $x=\frac{1}{8}$, e la quale è toccata dalla retta espressa dall' equazione $x=\frac{7+\sqrt{433}}{48}$ nel punto ove questa retta incontra l'asse delle x; questa terza branca tocca la prima ne' due punti $x=\frac{1}{2}, y=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$, rimane primieramente a sinistra delle due corrispondenti tangenti al pari della prima, poi le intersega nei punti $x=\frac{1}{6}, y=\pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$ e procede convergendo all'infinito col suddetto asintoto (*).

Napoli 8 gennaio 1852.

(*) Non sarà inutile avvertire che la 2ª e la 3ª parte della curva in quistione sono rappresentate da una medesima equazione; cioè dall'equazione che dà il valore di y^2 in cui si prenda il radicale esclusivamente col segno $+$.